配送拠点での商品発送の遅れの分析

The Analysis of delays for shipping Commodities at the Distribution Site

上　野　皓　司
Ueno, Koji

ABSTRACT

The times of arrival of order for merchandise from buyers are unpredictable. The times of shipment for order are also unpredictable, if those merchandises are produced at other sites different from the distribution site. How should the distribution site plan the inventory of merchandises? For the better planning the probabilities of the time of arrival of order and the time of arrival of merchandises from production site for corresponding the order from buyers must be evaluated. Queuing theory suggests the method of calculation of those probabilities. The examples of application of queuing theory at the distribution site are examined.

近年企業の多国籍化が著しく，生産や配送の拠点を国外に設置する傾向が急増している。以下では既に複数の国に生産拠点を設置した企業が，配送拠点でいかに合理的に対応するべきかを，不確定な状況のもとで理論的に検討するが，このような多国籍企業の進展に関連する諸問題の最近の研究をまず概観する。

一つの多国籍企業が誕生するまでにはかなりの歳月を要する。新商品が開発され，市場で取引されるまでには，開発やマーケティング等のいくつかの過程を経なければならない。Grossman and Helpman（1989）は，これらの過程と同時に，取引の類型や取引量の動態，多国籍企業の時間的な出現過程を，理論的なモデルによって分析している。また多国籍企業が国外に投資すれば，その直接投資が投資対象国の福祉にどのように影響を及ぼすかは，国によって異なるが，

Buffie（1993）は，国外からの直接投資と国内の既存の投資の関連，雇用の増減，短期と長期の経済に及ぼす効果，等を理論的に検討している。

発展途上国の経済成長を維持するための手段として，工業国の生産拠点の移転や新たな設置が考えられる。Riedel（1984）は発展途上国の経済成長を維持するための手段として，貿易がどの程度役立つかを分析している。国の状況によって影響力は異なると考えられるが，今日のような工業国からの生産拠点の移転や新たな設置は，その国の既存産業と競合しなければ，輸出によって経済の発展を導くことが可能である。以下では新たな商品を想定しているが，James and Stewart（1981）は，インドの砂糖の精製，ケニヤの石けん産業，チリの自動パン焼き，ケニヤのトウモロコシの製粉，朝食用穀物食品加工，セメントブロック生産，エチオピアの履物生産等の開始が，所得水準の低い国に及ぼした影響について分析しており，新商品の生産拠点の設置は，これらの国に望ましい影響を及ぼすと考えられる。また Davies and Lyons（1991）は，イギリスの 1987 年の外国所有企業の製造業にに占める粗付加価値は 17.9％であるが，雇用は 12.8％であり，外国所有企業の労働生産性は国内所有企業より高いと説明している。このような労働生産性の高さは，原材料や人材，等の適切な国に多国籍企業が生産拠点を設けた結果であると考えられるが，以下では工業国，発展途上国のいずれを問わず，生産拠点設置の要因には言及せず，既に複数の国に工場が設置されていると仮定する。

一般の国際市場は多数の需要と供給による完全競争が想定されている。しかし新商品の市場は特定の供給者に多数の需要者が対応し，独占や寡占に近い状態になる。現実には商品の種類によって，多数の寡占市場が存在するが，Dixit（1984）は寡占的な国際市場を理論的に検討している。生産が特定の企業だけに独占されているような商品は，その販売量が多くなれば政府等によって一定の規制が必要になることがある。Katrak（1980）は国際的に独占的な商品の適正な規制方法を検討しているが，規制対象に至るまでは，企業によりかなり自由な価格や販売政策がとられる。同様な商品を生産する国相互の間では，輸入を抑

制することは国内産業の販路をひろめ，規模の経済性によって輸出をも拡大するという見解がある。Dick（1994）には，この見解の妥当性の検討が見られるが，新たな商品の場合は，その生産技術が多くの企業に普及するまでは，購入国の輸入阻止に直面する可能性は少ない。それでは販売国での新商品の購入は，類似の商品の生産者にどのような反応を引き起こすであろうか。Williamson（1986）はこの反応をオーストラリアの 1968 年から 1978 年の 36 の産業について，オーストラリア独自の生産者と多国籍企業によってこの国に設置された生産者とを比較し，その差異と，このような差異による新たな商品の輸入浸透過程への影響を分析している。販売国の需要予測はこのような国内状況の把握が必要である。

Casas（1983）は，国際取引の平均輸送費は国内取引の平均輸送費より大きいために，輸送問題は国際間では国内と別個に検討しなければならない，と述べている。ある調査によれば，1974 年の E.E.C.諸国から米国への輸出の f.o.b.価格にに占める運賃と保険料の割合は，イギリスでは 6.6％，イタリアでは 9.6％であり，1977 年のイギリスの輸入の f.o.b.価格に占めるそれらの割合は 5.4％である。以下の検討は国内の配送拠点についても同様に分析可能であるが，国際間の輸送の困難や不確実な障害を前提にしている。また多数国間での取引は為替変動の問題を考慮しなければならない。ここでは為替の変化に言及していないが，購入国からの注文数や発注する生産国の選択は為替の影響を受ける。為替相場は取引上は名目額で表されるが，これらの問題には為替の実質額が影響することがある。Dornbusch（1987）には米国の為替の実質額の推移と国際間取引の関連が検討されている。新商品の出現は各国の輸出シェアーを変化させるが，Kravis and Lipsey（1982）は 1980 年に至る 25 年間にイギリスや米国の製造品の輸出シェアーが低下し，ドイツや日本のそれが増加した要因を，ドイツマルクや円の為替変動等を考慮した価格の変化と販売量の関連から分析している。ここでは為替の変化はとりあえず除外しているが，長期的な視野から配送拠点国の効率性を検討するさいには，これらの視点は重要である。

企業の国外への生産や配送拠点の設置は，国内の地方へのそれらと同様な問題を生み出しているが，上記のように国際取引は国内と異なる点が多い。商品の配送に着目すれば，国内とは異なる条件のもとでの活動であるために，意外な困難に直面することも少なくない。以下では国外の配送拠点国での状況を，複数の商品購入国と複数の商品生産国を想定し，注文の到着と製品の確保がいずれも不確定であることを前提に，分析する。

配送拠点国での不確定な注文の到着と製品確保の状況の検討は，確率的な分析を前提にするが，この分析に寄与すると考えられる一つの方法は，「待ち行列の理論[(1)]」である。この方法は多くの分野に利用されているが，以下で国内以上に予想が困難な国際的な配送拠点国を想定して，その状況の分析に適用する。注文到着や製品確保の確率はそれぞれの状況に応じて個別に検討されなければならないが，以下では一般的な例を想定する。

1. 配送拠点国での状況

配送拠点国での状況を分析するために，次のような仮定を設ける。(1) 配送拠点国には一つの新商品が用意されている。(2) 配送拠点国への商品注文の到着は不確定であるが，到着の頻度はポアソン過程で表される。(3) 商品は生産数量が限られており，複数の生産国，n 国で製造されている。(4) 配送拠点国では注文に応じて，既に注文した数量の製造を終えた生産国へ発注するが，配送拠点国への到着には不確定な時間を要する。すなわち発注された商品の製品完成の可能性は確率変数である。

(1) は購入需要が旺盛であると同時に不確定に変化する商品であることを，(2) は注文数は明示せず[(2)]，各購入国からの注文到着の頻度のみに着目し，その注

(1) 数学のマトリックスと区別するために“待ち行列”と呼ばれる。「待ち行列の理論」(queuing theory) は1910頃から電話回線数を決めるために研究が始められ，1950年代にはオペレーションズ・リサーチの重要な分析手法に発展した。今日では通信以外に商店での客への対応，航空機の空港での待機，工場での生産工程，貨物の配送，通信衛星の設置評価等多方面に応用されている。

文到着の頻度が確率過程であるポアソン過程で表されることを想定している。到着頻度のポアソン過程としての仮定は，待ち行列論でよく採用されると同時に，他の確率的な過程も極限的にはポアソン過程に近似されることが理論的に知られている。(3) は，商品は複数の国の各生産拠点で製造されているが，実験的な新商品であるために生産数量が限られていることを，(4) は，到着した注文は，その数量にかかわらず，配送拠点国へ注文分を既に納入した生産国へ一括発注するが，発注の数量や生産国での製造能力，輸送状況等のために，発注した注文が配送拠点国へ届くのは一定の確率的な値 $\Phi(t)$ による，ことを仮定している。

以上の前提のもとで，配送拠点国での状況は次のような点について検討することができる。①生産国の数 n，②販売国からの注文の到着頻度 $\lambda(t)$，③配送拠点国から生産国へ発注した商品の完成する確率が $\Phi(t)$，で表されるとき，(1) ある時点に配送拠点国から生産国へ発注した商品の製造が k 国で生産途中にある確率はどの程度であろうか。(2) またどの生産国でも生産途中にあり，配送拠点国に到着した注文の生産国への発注が一時停止する時点の確率はどの程度であろうか。(3) ある時点に配送拠点国から生産国へ発注している商品の生産が製造途中にある生産国の数の確率は製造途中にある生産国の数によってどのように変化するであろうか。(4) 発注できる生産国の数 n が異なれば，それらの確率はどのように変化するであろうか。

(1) は配送拠点国から発注可能な生産国が n 国あり，ある時点に $k(\leqq n)$ の生産国に発注した商品がまだ完成せず製造途中にある確率を，(2) は発注可能な生産国 n 国にすべて注文しているが，それらの生産国すべてで製造途中にある確率を，(3) は発注可能な生産国 n 国の範囲内で，発注した商品がまだ完成せず

↘（2）Husted and Kollintzas（1984）は合理的期待仮説に基づくボーキサイト，ココア，コーヒー，石油等の未加工の原料の輸入量をモデルにより推定するための方法を検討しているが，製品については同様な手法を適用可能であろうか。新商品の各国での需要量の推定が大まかにでも可能であれば，配送拠点国での対応はより効率的になる。ここでは購入国の関税や輸入制限数量等を考慮していない。Jabara and Thompson（1982）は，不確定な国際市場での開発途上国の最適関税率を検討しているが，新商品の関税率がどのように設定されるかは商品によって異なり，それぞれ個別に検討される必要がある。

製造途中にある確率が，k の値が変化すればどのように変わるかを，(4) は，(1) から (3) が発注可能な生産国の数 n が異なればどのように変わるかを，問題にしている。以下ではこれらの点について考える。

2. 発注された商品が生産国で製造途中にある確率

以下では「待ち行列の理論」に使用される基礎的な数式を使用して，問題を定式化する。注文の到着と生産国への発注，製造途中にある生産国の数等を関連づけ，検討のために必要な確率を求める。

2−1. 配送拠点国での周辺状況の数式的表現

任意の時刻に，配送拠点国での状況は，次の $(n+1)$ の状況のいずれかである。(1) いずれの生産国へも発注していない。この状況を A_0 と表す。(2) 一つの生産国へは発注しているが，他はすべて未発注である: A_1。(3)・・・，$(n+1)$ n 個の生産国へすべて発注している: A_n。

ある時刻 $t=t_0$ に状況が A_k であれば，この時刻 t_0 以後の発注状況は以下の 3 要因によって決まる。すなわち

〈1〉 時刻 t_0 に，既に発注された商品が生産国で製造されているが，それらの継続中の製造が各国で終了する時点,

〈2〉 新しい注文の到着時点,

〈3〉 時刻 t_0 以後に到着する注文の製造時間の長さ。

ここで次のような状況を想定する。

(1) 注文の到着頻度 $\lambda(t)$ はポアソン過程であり，一定時間 t の間に注文数 η が到着する確率は，到着数 0 については，$P_0(t)=e^{-\lambda t}$ から，1 以上については

$$P_\eta(t)=\{(\lambda t)^\eta/\eta!\}e^{-\lambda t}$$

から計算される[(3)]。時刻 t_0 以前の注文の到着頻度は，時刻 t_0 以後の注文の到着頻度には関係しない。すなわち「マルコフ過程」でる。

(3) すべての到着分布はポアソン過程で良く近似されることが知られている。

(2) 発注された商品の製品完成の可能性は確率変数で，一定時間を t とすれば，製品が完成する確率の分布関数は $\Phi(t)$ で表される。この分布関数 $\Phi(t)$ は $\mu(>0)$ を定数として，

$t \leqq 0$ のときは $\Phi(t)=0$,

$t>0$ では $\Phi(t)=1-e^{-\mu t}$

と表されることが可能である[4]。この分布関数は，もし与えられた時間 t が長ければ，製品が完成する確率の分布関数 $\Phi(t)$ は大きくなり，時間 t が短ければ，製品が完成する確率の分布関数は $\Phi(t)$ は小さくなる，ことを表している。またこの指数分布の性質によって，時刻 t_0 以後の製造中の製品の完成に要する時間の長さは，t_0 まで続いてきた製造時間の長さに依存せず，t_0 以後に到着する注文の製造時間の長さは，t_0 までどのように製造が行われてきたかに依存しない。すなわち商品の生産についても「マルコフ過程」である。

2−2. 発注の確率

時刻 t に発注状況が A_k である確率を $p_k(t)$ と表す。最初に時刻 $t+h$ にどの生産国へも発注していない状況 A_0 の確率を求める。この状況は次の三つの場合に起こりうる。①時刻 t にどの生産国へも発注がなく，時間 h の間に新たな注文がなかった，②時刻 t に一つの生産国へ発注していたが，その生産は時刻 $t+h$ までに終了し，その間に新たな注文は到着しなかった，③上記以外の状況，すなわち時刻 t に二つの生産国へ発注していたが，時刻 $t+h$ までに生産が終了する，時刻 t に三つの生産国へ発注していたが，時刻 $t+h$ までに生産が終了する，等。

①の確率は，

$$p_0(t)e^{-\lambda h}=p_0(t)\{1-\lambda h+\delta(h)\}$$

で，②の確率は，

$$p_1(t)e^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h})=p_1(t)\mu h+\delta(h)$$

であり，二つの式の $\delta(h)$ は，時間 h を短くとったときの微小な値をあらわして

(4) 他の形でも表現可能であるが，このような指数分布によって表されることが多い。

おり，それぞれ異なった値である[(5)]。③の確率は時間 h を短く取れば，上記とは異なる微小な確率 $\delta(h)$ で表すことができる。

時刻 $t+h$ にどの生産国にも未完成な注文が存在しない確率は，上記の①，②，③の確率を合計すればよく，微小な値はひとまとめに $\delta(h)$ と表せば，

$$p_0(t+h) = (1-\lambda h)p_0(t)+\mu h p_1(t)+\delta(h) \tag{1}$$

である。(1) はまた

$$\{p_0(t+h)-p_0(t)\}/h = -\lambda p_0(t)+\mu p_1(t)+\delta(h) \tag{2}$$

と表されることができ[(6)]，h を極限にまで小さくすれば，すなわち $h\to 0$ にとれば，(2) は

$$dp_0(t)/dt = -\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \tag{3}$$

になる[(7)]。

それでは $1\leqq k<n$ のときはどうであろうか，以下の計算では注文が到着し製品が完成する，といった二つの事象の発生確率は，時間 h を短くとっており，いずれの発生確率も低く，二つを乗じた確率はきわめて低いために，微小確率 $\delta(h)$ に含まれる。したがっていずれか一つの事象の発生のみの確率を計算する。時刻 t に k の生産国へ発注されている状況は三つの場合に起こり，それぞれの確率は以下ようになる。

①時刻 t に $k-1$ の生産国へ発注され，時間 h の間に新たな一つの注文が到着する確率。②時刻 t に k の生産国へ発注され，時刻 $t+h$ に配送拠点国へ一つも

---

(5) これらの式の導き方は以下のようである。テイラー級数により展開すれば

$$e^{-\lambda h} = 1-\lambda h+\lambda^2h^2/2-\lambda^3h^3/6+\cdots, \tag{1}$$

$$e^{-\mu h} = 1-\mu h+\mu^2h^2/2-\mu^3h^3/6+\cdots, \tag{2}$$

であり，上の式は，(1) の右辺の $(\lambda^2h^2/2-\lambda^3h^3/6+\cdots)$ を微小な確率 $\delta(h)$ で置き換えることにより得られる。下の式は，$e^{-\lambda}h$ を $1-\lambda h$，$e^{-\mu}h$ を $1-\mu h$ で近似すれば，

$$\begin{aligned} e^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h}) &\fallingdotseq \{e^{-\lambda h}-e^{-(\lambda+\mu)h}\} \\ &\fallingdotseq (1-\lambda h)-\{1-(\lambda+\mu)h\} \\ &\fallingdotseq \mu h \end{aligned}$$

であり，テイラー級数の残りの部分に対する確率を $\delta(h)$ で表している。

(6) 計算上は (2) の右辺第３項は $\{\delta(h)/h\}$ であるが，微小な値はすべて $\delta(h)$ で表している。

(7) $\delta(h)$ は，$h\to 0$ では０になる。

注文が到着しない確率から，注文が到着せずに時刻 $t+h$ に k の生産国で製品が完成する確率を差し引いた確率。③時刻 t に $k+1$ の生産国へ発注していたが，$k+1$ 国のいずれかの生産国で時刻 $t+h$ までに製品が完成し，その間に新たな注文が到着しなかった確率。④上記以外の状況，すなわち時刻 t に $k+2$ の生産国へ発注していたが時刻 $t+h$ までに二つの国で生産が終了する，時刻 t に $k+3$ の生産国へ発注していたが時刻 $t+h$ までに三つの国で生産が終了する，等。

①の確率は(8)

$$p_{k-1}(t)\lambda he^{-\lambda h} = p_{k-1}(t)\{\lambda h+\delta(h)\},$$

②の確率は,

$$p_k(t)\{e^{-\lambda h}-ke^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h})\}$$
$$= p_k(t)\{1-\lambda h-k\mu h\}+\delta(h),$$

③の確率は

$$(k+1)p_{k+1}(t)e^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h}) = (k+1)p_{k+1}(t)\mu h+\delta(h),$$

④の確率は $\delta(h)$ と表すことができる。

①から④の確率を合計すれば,

$$p_k(t+h) = \lambda hp_{k-1}(t)+(1-\lambda h-k\mu h)p_k(t)+(k+1)\mu hp_{k+1}(t)+\delta(h) \tag{4}$$

となり，整理すれば,

$$\{p_k(t+h)-p_k(t)\}/h = \lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t)+\delta(h) \tag{5}$$

であり，h を 0 に近づければ，$h\to 0$ の極限値として

$$dp_k(t)/dt = \lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t) \tag{6}$$

の方程式を得ることができる。

(8) ポアソン過程の計算では

$$p_{k-1}(t)\lambda he^{-\lambda h} = p_{k-1}(t)\lambda h\{1-\lambda h+\delta(h)\}$$

であるが，右辺を $p_{k-1}(t)\{\lambda h+\delta(h)\}$ で近似している。

さらに$k=n$のときの確率を求めてみよう。時刻tにnの生産国へ発注されている状況は次の二つの場合に起こり，それぞれの確率は以下ようになる。

①時刻tに$n-1$の生産国へ発注され，時間hの間に新たな一つの注文が到着する確率。②時刻tにnの生産国へ発注されたすべての可能性，すなわち確率１から，時刻$t+h$に配送拠点国へ注文が到着せずにnの生産国で製品が完成する確率を差し引いた確率。③上記以外の状況，すなわち時刻tに$n+1$の生産国へ発注していたが，時刻$t+h$までに一つの国で生産が終了する，時刻tに$n+2$の生産国へ発注していたが，時刻$t+h$までに二つの国で生産が終了する，等。

①の確率は

$$p_{n-1}(t)\lambda he^{-\lambda h}=p_{n-1}(t)\{\lambda h+\delta(h)\},$$

②の確率は

$$p_n(t)\{1-ne^{-\lambda h}(1-e^{-\mu h})\}=(1-n\mu h)p_n(t)+\delta(h),$$

③の確率は$\delta(h)$と表すことができる。

①から③の確率を合計すれば，

$$p_n(t+h)=\lambda hp_{n-1}(t)+(1-n\mu h)p_n(t)+\delta(h) \tag{7}$$

となり，整理すれば，

$$\{p_n(t+h)-p_n(t)\}/h=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t)+\delta(h) \tag{8}$$

であり，hを０に近づければ，$h\to 0$の極限値として

$$dp_n(t)/dt=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t) \tag{9}$$

の方程式を得ることができる。

2−3. 発注停止時点の確率

上記の三つの方程式（3），（6），（9）は，配送拠点国から生産国への発注国数が，0，k，nである場合の時刻tでの確率の変化の状態を表している。発注状況の確率は時刻$t=0$のときの初期条件として，

$k=0$のときは$p_0(0)=1$，$k\geqq 1$のときは$p_k(0)=0$

を仮定することができる。これらの条件は初期$t=0$にはどの生産国にも発注し

ていなかったことを表している。また任意の時刻 $t(\geqq 0)$ に発注状況の確率の和は1である，という条件

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1 \tag{10}$$

が成立している。

生産国への発注状況の確率は，上記の三つの方程式（3），(6)，(9) と (10) より導くことが可能であるが，三つの方程式（3），(6)，(9) は微分－差分混合方程式で解法が複雑である。そこで同じ解となる t が無限大，すなわち $t \to \infty$ のときの状況確率を計算する。$t \to \infty$ では $p_k(t)$ はこれ以上変化しない極限値 p_k となる。すなわち

$$\lim_{t \to \infty} p_k(t) = p_k$$

である。[9] このとき方程式（3），(6)，(9) の左辺の値は0で，

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \tag{11}$$

$$\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0 \tag{12}$$

$$\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0 \tag{13}$$

が成立し，(10) は

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 \tag{14}$$

となる。

方程式（11），(12)，(13)，(14) を解けば p_k が得られるが，$X_k = \lambda p_{k-1} - k\mu p_k$ と置けば，(11)，(12)，(13) は

$$X_1 = 0 \quad (k = 1),\ X_k - X_{k+1} = 0 \quad (1 \leqq k < n),\ X_n = 0 \quad (k = n)$$

となる。k が $1 \leqq k < n$ のときには，$X_k = \lambda p_{k-1} - k\mu p_k = X_{k+1} = \lambda p_k - k\mu p_{k+1}$ であるために，k の値が1増加しても $X_k = \lambda p_{k-1} - k\mu p_k$ の関係が維持されることを示しており，$1 \leqq k < n$ のすべての k にこの関係が存在していることを意味している。$k = 1$ については（11）から，$X_1 = \lambda p_0 - \mu p_1 = 0$ が，$k = n$ については，$X_n = \lambda p_{n-1} - n\mu p_n = 0$ が成立するために，$1 \leqq k \leqq n$ のすべての k について，

(9) このような変化がなくなった状態は「平衡状態」，この状態のときの三つの方程式（3），(6)，(9) は「平衡方程式」，と呼ばれる。

$$k\mu p_k = \lambda p_{k-1} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{15}$$

である。

（15）に $k=1$ を代入すれば $p_1=(\lambda／\mu)p_0$，$k=2$ を代入すれば $p_2=(1/2)(\lambda／\mu)p_1$，$k=3$ を代入すれば $p_3=(1/3)(\lambda／\mu)p_2$，・・・，$k=n$ を代入すれば $p_n=(1/n)(\lambda／\mu)p_{n-1}$ で，これらの関係から

$$p_k=(\omega^k／k!)p_0 \quad (k \geqq 1,\ \omega=\lambda／\mu) \tag{16}$$

を得ることができる。（14）より

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n}(\omega^k／k!)p_0 = 1 \tag{17}$$

の関係が存在し，これより

$$p_0=\{\sum_{k=0}^{n}(\omega^k／k!)\}^{-1} \tag{18}$$

であり，（18）を（16）に代入すれば，

$$p_k=(\omega^k／k!)\{\sum_{k=0}^{n}(\omega^k／k!)\}^{-1} \quad 1 \leqq k \leqq n \tag{19}$$

となる。（19）の右辺の $(\omega^k／k!)$ は k が $1 \leqq k \leqq n$ の範囲内の任意の値によって変化する値であるが，$\Sigma(\omega^k／k!)\}^{-1}$ は k が 0 から n までのすべての値によって計算される定数であり，k の任意の値によって変化しないために，わかりやすく表現すれば，（19）は

$$p_k=(\omega^k／k!)\{\sum_{g=0}^{n}(\omega^g／g!)\}^{-1} \quad 1 \leqq k \leqq n,\quad 0 \leqq g \leqq n \tag{20}$$

となる。[(10)]

$k=n$ のときの（20）の p_k は，

$$p_n=(\omega^n／n!)\{\sum_{g=0}^{n}(\omega^g／g!)\}^{-1} \quad 0 \leqq g \leqq n \tag{21}$$

であり，n の数の生産国へ発注し，それらの生産国で製造中である確率を表しており，販売国から新たな注文が到着してもすぐに生産国へ発注することができない確率に等しい。

（10）（20）は「アーランの公式」と呼ばれる。

3. 問題の検討

以上の数式にもとづいていくつか数値例を考える。注文の到着頻度 $\lambda(t)$ はポアソン過程であり，一定時間 t の間に注文数 η が到着する確率は，到着数 0 については，$p_0(t) = e^{-\lambda t}$ から，1 以上については $P_\eta(t) = \{(\lambda t)^\eta / \eta!\} e^{-\lambda t}$ から計算される。また発注された商品の完成可能性は確率変数 $\Phi(t)$ で表され，一定時間 t には，$\mu(>0)$ を定数として，$t \leqq 0$ のときは $\Phi(t) = 0$，$t > 0$ では $\Phi(t) = 1 - e^{-\mu t}$ から計算される。したがって注文の到着数については λ が大きいほど到着の可能性が高まり，商品の完成可能性についても μ が大きいほど完成の可能性が高まる。$\omega = \lambda / \mu$ は，λ が大きいほど，また μ が小さいほど，大きな値をとる。注文の到着可能性が高く商品の完成可能性が低ければ ω は大きくなり，この ω は「配送拠点国での生産国への発注停滞の指標」である。(20) や (21) の確率は，n，λ，μ，$\omega = \lambda / \mu$，等の値によって変化する。以下では n，λ，μ，$\omega = \lambda / \mu$，にいくつかの数値を想定し，問題を検討する。

3－1. 製造途中にある生産国の数による確率

λ が大きいほど到着の可能性が高まり，μ が大きいほど完成の可能性が高まるが，$\omega = \lambda / \mu$ の値は，λ と μ の相対的な大きさによって変化し，λ と μ がどのような値をとろうと λ / μ が一定の比率であれば，(20) や (21) の値は同一であるために，以下ではまず ω の値を想定し，問題を考える。

配送拠点国から生産国へ最大で 5 国に発注されるとき，ある時点に 0 から 5 の生産国で発注が製造途中にある確率はどのような値をとるであろうか。この確率は (20) から計算されるが，ω の値によって変化するために，$\omega = 0.1$，$\omega = 1.0$，$\omega = 5.0$，$\omega = 10.0$ の四つの値について計算すれば，以下のようになる。

（$\omega = 0.1$）

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000	0.0000

$\omega = 0.1$ では，$k = 0$ でどの生産国へも発注されていない確率は 0.9048，一つの国に発注されている確率は 0.0905，5 国すべてに発注されている確率は 0.0000 であり，確率の合計は 1 になっている[(11)]。すなわち $\Sigma p_k = 1$ である。ω の値が 0.1 と低い値のときは，k が 0 や 1 のときに確率が大きくなる。$\omega = \lambda / \mu$ は，λ が大きいほど，また μ が小さいほど，大きな値をとるが，$\omega = 0.1$ のときは注文の到着可能性が低く商品の完成可能性が高いために，生産国へ発注している可能性が非常に低くなっている。すなわちどの国へも発注していない確率が 0.9048 で，多くの割合を占めている。

（$\omega = 1.0$）

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.3681	0.3681	0.1840	0.0614	0.0153	0.0031

$\omega = 1.0$ では，$k = 0$ でどの生産国へも発注されていない確率は 0.3681，一つの国に発注されている確率は 0.3681，5 国すべてに発注されている確率は 0.0031 であり，確率の合計は 1 になっている[(12)]。ω の値が 1.0 と 0.1 より高くなると，k が 0 や 1 のときの確率は小さくなり，5 国に発注されている確率も 0.0031 と

(11) $\omega = 0.1$ のときは，(20) は
$p_k = (0.1^k / k!)\{\sum_{g=0}^{5}(0.1^g / g!)\}^{-1}$
より計算され，右辺の $\{\Sigma(0.1^g / g!)\}^{-1}$ は k の値にかかわらず定数であり，
$\{\Sigma(0.1^g / g!)\}^{-1} \fallingdotseq 1.1052$ である。

(12) $\omega = 1.0$ のときは，(20) は
$p_k = (1.0^k / k!)\{\sum_{g=0}^{5}(1.0^g / g!)\}^{-1}$
より計算され，右辺の $\{\Sigma(1.0^g / g!)\}^{-1}$ は k の値にかかわらず定数であり，
$\{\Sigma(1.0^g / g!)\}^{-1} \fallingdotseq 2.7167$ である。

$\omega=0.1$ のときより高くなる。どの国へも発注していない確率も 0.3681 で，全体に占める割合は小さくなっている。

（$\omega=5.0$）

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.0109	0.0547	0.1367	0.2279	0.2849	0.2849

$\omega=5.0$ では，　$k=0$ でどの生産国へも発注されていない確率は 0.0109，一つの国に発注されている確率は 0.0547，5 国すべてに発注されている確率は 0.2849 であり，確率の合計は 1 になっている[(13)]。ω の値が 5.0 とかなり高くなると，k が 0 や 1 のときの確率は非常に小さくなり，5 国に発注されている確率も 0.2849 と高くなる。$\omega=1.0$ に比べ，$\omega=\lambda/\mu$ の値が 5 倍になり，到着率が相対的に大きくなれば,「生産国への発注停滞」が拡大することが示されている。

$\omega=10.0$

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.0007	0.0068	0.0338	0.1128	0.2820	0.5640

$\omega=10.0$ では，$k=0$ でどの生産国へも発注されていない確率は 0.0007，一つの国に発注されている確率は 0.0068 と，極端に小さくなっている。5 国すべてに発注されている確率は 0.5640 と 50％以上の値である[(14)]。ω の値が 10.0 と高く

(13)　$\omega=5.0$ のときは，(20）は

$$p_k=(5.0^k/k!)\{\sum_{g=0}^{5}(5.0^g/g!)\}^{-1}$$

より計算され，右辺の $\{\Sigma(5.0^g/g!)\}^{-1}$ は k の値にかかわらず定数であり，

$\{\Sigma\,5.0^g/g!)\}^{-1}\fallingdotseq 91.4167$ である。

(14)　$\omega=10.0$ のときは，(20）は

$$p_k=(10.0^k/k!)\{\sum_{g=0}^{5}(10.0^g/g!)\}^{-1}$$

より計算され，右辺の $\{\Sigma(10.0^g/g!)\}^{-1}$ は k の値にかかわらず定数であり，

$\{\Sigma(10.0^g/g!)\}^{-1}\fallingdotseq 1477.6667$ である。ここでは確率の合計は 1.0001 になっているのは，小数点以下 5 桁を四捨五入しているためである。

なると，注文到着の可能性が商品完成の可能性より極度に大きくなるために，このような状況が生じている。

ω の値が異なれば p_k がどのように変化するかを示せば，次のようになる。

k	0	1	2	3	4	5
$\omega=0.1$	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000	0.0000
$\omega=1.0$	0.3681	0.3681	0.1840	0.0614	0.0153	0.0031
$\omega=5.0$	0.0109	0.0547	0.1367	0.2279	0.2849	0.2849
$\omega=10.0$	0.0007	0.0068	0.0338	0.1128	0.2820	0.5640

最初に設定した(1)の問題,「ある時点に，配送拠点国から生産国へ発注した商品の製造が k 国で生産途中にある確率はどの程度であろうか。」は，$k=0, 1, \cdots, 5$ のこれらの値を読めばよく，(2)の「またどの生産国でも生産途中にあり，配送拠点国に到着した注文の生産国への発注が一時停止する時点の確率はどの程度であろうか。」は，$k=5$ に示されている。ω の値が大きくなるにしたがって，$k=5$ の確率は大きくなる。(3)の「ある時点に配送拠点国から生産国へ発注している商品の生産が製造途中にある生産国の数の確率は，製造途中にある生産国の数によってどのように変化するであろうか。」は，ω の各値について，$k=0, 1, \cdots, 5$ によって，確率がどのように変化するかを比較することによって知ることができる。例えば $\omega=1.0$ の確率は，k が大きくなるにしたがって小さくなるが，$\omega=10.0$ では，逆に k が大きくなるにしたがって確率は小さくなる。すなわち，$\omega=1.0$ では，どの生産国へも発注していない確率は５国すべてに発注している確率より大きくなるが，$\omega=10.0$ では，どの生産国へも発注していない確率は５国すべてに発注している確率よりはるかに小さくなる。

(4)の「発注できる生産国の数 n が異なれば，それらの確率はどのように変化するであろうか。」は，上記の $n=5$ とは異なる数の生産国を想定し，$n=5$ の場合と比較することによって検討することができる。

3−2. 発注する生産国の数が異なるときの確率

配送拠点国が到着した注文を発注する生産国が 8 国あるとき，上記と同じ ω の各値に対する確率はどのような値になるであろうか。以下はその計算結果である。括弧内の数値は生産国が 5 国の場合である。

	$\omega = 0.1$	$\omega = 1.0$	$\omega = 5.0$	$\omega = 10.0$
$k = 0$	0.9048 (0.9048)	0.3679 (0.3681)	0.0072 (0.0109)	0.0001 (0.0007)
$k = 1$	0.0905 (0.0905)	0.3679 (0.3681)	0.0362 (0.0547)	0.0014 (0.0068)
$k = 2$	0.0045 (0.0045)	0.1839 (0.1840)	0.0904 (0.1367)	0.0068 (0.0338)
$k = 3$	0.0002 (0.0002)	0.0613 (0.0614)	0.1506 (0.2279)	0.0227 (0.1128)
$k = 4$	0.0000 (0.0000)	0.0153 (0.0153)	0.1883 (0.2849)	0.0568 (0.2820)
$k = 5$	0.0000 (0.0000)	0.0031 (0.0031)	0.1883 (0.2849)	0.1137 (0.5640)
$k = 6$	0.0000	0.0005	0.1569	0.1895
$k = 7$	0.0000	0.0001	0.1121	0.2707
$k = 8$	0.0000	0.0000	0.0700	0.3383

(1) の問題,「ある時点に，配送拠点国から生産国へ発注した商品の製造が k 国で生産途中にある確率はどの程度であろうか。」は，$n = 5$ の場合とどのように異なるであろうか。$\omega = 0.1$ では，$k = 3$ まで同じ値をとり，$k = 4$ より大きい値ではすべて確率は 0 である。$\omega = 1.0$ でも $k = 5$ までほぼ同じ値をとり，$k = 6$ より大きい値では 0 に近い確率である。しかし $\omega = 5.0$ や $\omega = 10.0$ ではかなり異なり，$\omega = 5.0$ では $k = 6$ より大きい値の確率の合計は 0.339，$\omega = 10.0$ では $k = 6$ より大きい値の確率の合計は 0.7985 である。発注する生産国が 8 国あれば，5 国に比べ，発注途上にある生産国の数に確率が分散し，ω の値が大きいほど k の大きな値に発注の可能性が高くなる。

(2) の「どの生産国でも生産途中にあり，配送拠点国に到着した注文の生産国への発注が一時停止する時点の確率はどの程度であろうか。」は，$\omega = 0.1$ ではい

ずれの場合でも確率は0であるが，$\omega = 1.0$ では5国のときが0.0031，8国では0，$\omega = 5.0$ では5国のときが0.2849，8国では0.0700，$\omega = 10.0$ では5国のときが0.5640，8国では0.3383であり，生産国の数が増えるにつれて確率が低下する。

(3)の，「ある時点に配送拠点国から生産国へ発注している商品の生産が製造途中にある生産国の数の確率は，製造途中にある生産国の数によってどのように変化するであろうか。」は，生産国が5国と8国の k の値の変化にしたがって比較すれば明らかであるが，生産国の数が増大すれば，その変化はなだらかになる。

参考文献

Buffie, Edward F., “Direct Foreign Investment, Crowding out, and Underemployment in the Dualistic Economy”, Oxford Economic Papers, 45（1993）, 639-67.

Casas, F. R., “International Trade with Produced Transport Services”, Oxford Economic Papers, 35（1983）, 89-109.

Davies, Stephen W. and Bruce R. Lyons, “Characterising Relative Performance : The Productivity Advantage of Foreign Owned Firms in the UK”, Oxford Economic Papers, 43（1991）, 584-95.

Dick, Andrew R. “Does Import Protection Act as Export Promotion? : Evidence from the United States”, Oxford Economic Papers, 46（1994）, 83-101.

Dixit, Avinash, “International Trade Policy for Oligopolistic Industries”, Economic Journal, 94（1984）, 1-16.

Dornbusch, Rudiger, “Exchange Rate Economics : 1986”, Economic Journal, 97（1987）, 1-18.

Grossman, Gene M. and Elhanan Helpman, “Product Development and International Trade”, Journal of Political Economy, 97（1989）, 1261-83.

Husted, Steven and Tryphon Kollintzas, “Import Demand with Rational Expectations : Estimates for Bauxite, Cocoa, Coffee, and Petroleum”, Review of Economics and Statistics, 66（1984）, 608-18.

Jabara, Cathy L. and Robert L. Thompson, “The Optimal Tariff for a Small Country under International Price Uncertainty”, Oxford Economic Papers, 34（1982）, 326-31.

James, Jeffrey and Frances Stewart, “New Products : A Discussion of the Welfare Effects of the Introduction of New Products in Developing Countries”, Oxford Economic Papers, 33（1981）, 81-107.

Katrak, Homi, “Multi-National Monopolies and Monopoly Regulation”, Oxford Economic Papers, 32（1980）, 453-66.

Kravis, Irving B. and Robert E. Lipsey, “Prices and Market Shares in the

International Machinery Trade”, Review of Economics and Statistics, 64 (1982), 110-16.

Riedel, James, “Trade as the Engine of Growth in Developing Countries, Revisited”, Economic Journal, 94 (1984), 56-73.

Williamson, Peter J. “Multinational Enterprise Behaviour and Domestic Industry Adjustment under Import Threat”, Review of Economics and Statistics, 68 (1986), 359-68. .